Mesure quantitative de l'information (II)

Exercice

Soit X une variable aléatoire discrète pouvant prendre n valeurs différentes et soit Y une variable aléatoire discrète distribuée de façon uniforme sur m valeurs distinctes. Tout au long de l'exercice, on ne fera aucune hypothèse sur X.

1. Donner l'entropie maximum de X, et préciser le cas dans lequel cette valeur serait obtenue.

2. Calculer l'entropie de Y.

3. Dans le cas où $n = m$, classer par ordre croissant les grandeurs suivantes : $H(Y)$, 0, $H(X)$, $H(X;Y)$, $H(X) + H(Y)$, $H(X|Y)$. Justifier *impérativement* chacune des étapes de votre classement.

4. Expliciter les cas d'égalité dans le classement proposé à la question précédente, c'est-à-dire donner pour chaque inégalité les cas dans lesquels elle devient une égalité.

5. On considère maintenant le cas où la distribution jointe $P(X = x_i; Y = y_j)$ est donnée par le tableau ci-dessous :

$P(X;Y)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1/24	1/12	1/6	1/24
x_2	1/6	1/8	1/24	1/6
x_3	1/24	1/24	1/24	1/24

Vérifier que Y est uniformément distribuée. Calculer $I(X;Y)$.

Problème

Pour une région donnée, les prévisions d'un météorologiste se répartissent selon les fréquences relatives données par le tableau ci-dessous. Les colonnes correspondent au temps effectif, que l'on représente par la variable aléatoire T, prenant pour valeur 0 ou 1 selon qu'il fait *mauvais temps* (0) ou *beau temps* (1). Les lignes correspondent à la prévision du météorologiste, que l'on identifie par la variable aléatoire M, également à valeurs dans $\{0, 1\}$ selon qu'il avait prévu du *mauvais temps* (0) ou du *beau temps* (1).

$P(M = i, T = j)$	beau temps ($T = 1$)	mauvais temps ($T = 0$)
beau temps ($M = 1$)	5/8	1/16
mauvais temps ($M = 0$)	3/16	1/8

1. Calculer les probabilités marginales $P(M = i)$ et $P(T = j)$, avec $i, j \in \{0, 1\}$.

2. Montrer que le météorologiste se trompe 1 fois sur 4.

3. Un étudiant éclairé annonce qu'en prévoyant toujours du beau temps, il se trompe moins souvent que le météorologiste. Vérifier cette assertion.

4. Soit E la variable aléatoire représentant la prévision de l'étudiant. Comme pour T et M, celle-ci est à valeur dans $\{0, 1\}$ selon qu'il s'agit de mauvais ou de beau temps. Calculer la valeur de $I(E;T)$.

5. Calculer $I(M;T)$.

6. En comparant $I(M;T)$ à $I(E;T)$, quel éclairage apporte la théorie de l'information sur les prévisions du météorologiste et celles de l'étudiant éclairé ?

7. Venant d'essuyer un cuisant revers, l'étudiant annonce avoir trouvé une méthode révolutionnaire pour prédire la météo. Il se targue d'avoir les résultats mentionnés dans le tableau ci-dessus. Comme précédemment, les lignes correspondent aux prévisions, et les colonnes à la météo effective.

$P(E=i, T=j)$	beau temps ($T=1$)	mauvais temps ($T=0$)
beau temps ($E=1$)	403/512	93/512
mauvais temps ($E=0$)	13/512	3/512

Calculer les probabilités marginales $P(E=0)$ et $P(E=1)$.

8. Comparer $P(E=i, T=j)$ et $P(E=i)\,P(T=j)$, pour tout $i, j \in \{0, 1\}$. Conclure sur la pertinence des prévisions de l'étudiant éclairé.

9. On souhaite archiver le temps T en adoptant un codage binaire. En utilisant le premier théorème de Shannon, donner la place mémoire moyenne minimale qu'il faut prévoir, en bits par réalisation de T.

10. Refaire le calcul précédent dans le cas du stockage de M. Quelle place mémoire totale minimale représente le stockage de M et de T, en bits par réalisation du couple (M, T) ?

11. On souhaite à présent coder *conjointement* M et T. Calculer $H(M;T)$. En déduire la place mémoire moyenne minimale qu'il faut prévoir, en bits par réalisation du couple (M, T).

12. Interpréter la différence obtenue entre les résultats des 2 questions précédentes.

13. Proposer un codage de Huffman pour coder les couples (M, T).

14. Calculer la longueur moyenne $\overline{n}$ des mots du code binaire conçu à la question précédente. Comme on pouvait s'y attendre, quelle double inégalité vérifie $\overline{n}$?