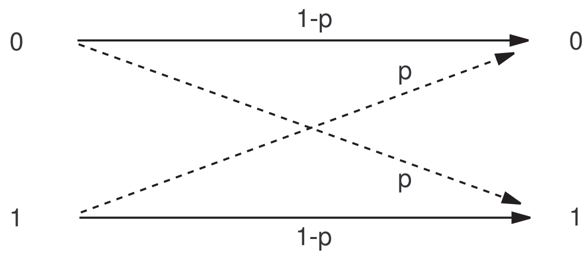
Cédric Richard

Canaux discrets

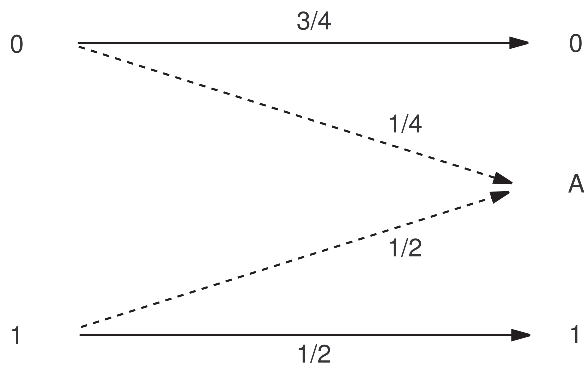
Exercice 1

On considère un canal binaire symétrique d'alphabets d'entrée et de sortie $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$ sachant que $P(Y = 0) = 0.4$ et $P(Y = 1) = 0.6$. Calculer l'entropie de la source. Calculer l'information mutuelle $I(X;Y)$. Calculer la capacité C de ce canal.



Exercice 2

On considère un canal de transmission d'alphabets d'entrée et sortie définis par $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ et $\mathcal{Y} = \{0, \alpha, 1\}$, respectivement. Sachant que $P(X = 0) = 2/3$ et $P(X = 1) = 1/3$, calculer $H(X)$, $H(X|Y = \alpha)$ et $I(X;Y)$. S'agit-il d'un canal symétrique ?



Exercice 3

Calculer les distances de Hamming suivantes : $\mathrm{d_{Ham}}(01001, 10110)$; $\mathrm{d_{Ham}}(12345, 54321)$.

Exercice 4

Soit le code binaire $\mathcal{C} = \{11100, 01001, 10010, 00111\}$.

1. Déterminer la distance minimale de $\mathcal{C}$.
2. Décoder 10000, 01100 et 00100. Que constate-t-on ?

Exercice 5

Construire un $(8, 4, 5)$-code binaire.

Exercice 6

Montrer que la distance de Hamming est une métrique.

Exercice 7

Soit x un mot de $\mathcal{A}^n$, avec $|\mathcal{A}| = q$, et soit r un réel strictement positif. La boule de rayon r centrée en x est, par définition :

$$S_q(x, r) = \{y \in \mathcal{A}^n \, |\mathrm{d}(x, y) \leq r\}.$$

1. Représenter $\mathcal{A}^3$ avec $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ et déterminer la boule de rayon 1 centrée en 111. Combien cette boule a-t-elle de points ?

2. Le volume de $S_q(x, r)$ est le nombre d'éléments de cet ensemble. Pour un rayon donné, il est indépendant de x et on le note $V_q(n, r)$. Calculer $V_q(n, r)$.

Exercice 8

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}^n$ un code. Par définition, le rayon d'empilement (packing radius) de $\mathcal{C}$ est le plus grand entier r pour lequel les boules $S_q(c, r)$ centrées sur les mots du code sont disjointes. On le note $pr(\mathcal{C})$. Le rayon de recouvrement (covering radius) est le plus petit entier s pour lequel les boules $S_q(c, s)$ centrées sur les mots du code recouvrent $\mathcal{A}^n$. On le note $cr(\mathcal{C})$. Enfin, on dit qu'un code $\mathcal{C}$ est parfait si $pr(\mathcal{C}) = cr(\mathcal{C})$.

1. Si $\mathcal{C}$ est un (n, M, d)-code q-aire tel que $d = 2t + 1$, montrer que $\mathcal{C}$ est parfait si et seulement si $M.V_q(n, t) = q^n$.

2. Vérifier que les codes $(n, q^n, 1)$, $(n, 1, 2n + 1)$ et $(2n + 1, 2, 2n + 1)$ sont parfaits.