

Polynômes

Exercice 1

Calculer les produits de polynômes suivants :

1. $(1 + X^3 + X^6 + X^9)(1 + X^3)$ dans $\mathbf{F}_2[X]$.
2. $(1 + X)(-1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4)(1 + X^8)$ dans $\mathbf{F}_3[X]$.

Exercice 2

Calculer les pgcd suivants :

1. $\text{pgcd}(1 + X + X^4 + X^6, 1 + X + X^7 + X^8)$ dans $\mathbf{F}_2[X]$.
2. $\text{pgcd}(1 + X + X^{11}, 1 + 2X + 2X^5 + X^6)$ dans $\mathbf{F}_3[X]$.
3. $\text{pgcd}(21X^2 + 5X^3 + 12X^7, 1 + X + X^4)$ dans $\mathbf{F}_{31}[X]$.

Exercice 3

Considérons le polynôme $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ dans $\mathbf{F}_2[X]$. On souhaite savoir si ce polynôme est irréductible.

1. Montrer que $P(X)$ n'admet pas de racine dans $\mathbf{F}_2[X]$.
2. Donner tous les polynômes de degré 2 de $\mathbf{F}_2[X]$.
3. En déduire que $P(X)$ est irréductible sur $\mathbf{F}_2[X]$.

Montrer que $Q(X) = X^4 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbf{F}_2[X]$.

Exercice 4

Montrer qu'il existe exactement deux polynômes irréductibles distincts de degré 3 dans $\mathbf{F}_2[X]$.

Exercice 5

Calculer X^4 dans $\mathbf{F}_3[X]/(2 + X + X^2)$.

Exercice 6

Construire la table multiplicative de $\mathbf{F}_2[X]/(1 + X + X^3)$.