TD3 : Méthode de blanchiment simultané

Exercice 1
On considère un vecteur aléatoire $\boldsymbol{x}$ de dimension p, de moyenne $\boldsymbol{m}$ et de matrice de variance-covariance $\boldsymbol{\Sigma}$. On effectue la transformation suivante :

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}$$

On sait trouver une transformation linéaire $\boldsymbol{\Phi}$ de $\boldsymbol{z}$ telle que la matrice de variance-covariance de $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{z}$, notée $\boldsymbol{\Lambda}$, soit diagonale. Les termes de $\boldsymbol{\Lambda}$ sont les valeurs propres de $\boldsymbol{\Sigma}$, et la matrice $\boldsymbol{\Phi}$ est construite à partir des vecteurs propres de $\boldsymbol{\Sigma}$.

1. Montrer que le vecteur aléatoire $\boldsymbol{z}'$ est d'espérance nulle.
2. Définir une transformation $\boldsymbol{P}$ de $\boldsymbol{z}'$ en $\boldsymbol{y}$, notée $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{z}'$, de sorte que la matrice de variance-covariance de $\boldsymbol{y}$ soit la matrice identité $\boldsymbol{I}$. Cette opération est appelée un blanchiment.
3. On considère maintenant deux classes ω_1 et ω_2 caractérisées respectivement par les vecteurs moyennes $\boldsymbol{m}_1$ et $\boldsymbol{m}_2$, et par les matrices de variance-covariance $\boldsymbol{\Sigma}_1$ et $\boldsymbol{\Sigma}_2$. On suppose que :
$$\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{0}$$
On définit une transformation $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{x}$ telle que
$$\boldsymbol{\Sigma}_y = \boldsymbol{I}$$
si $\boldsymbol{x} \in \omega_1$. Donner la matrice de variance-covariance $\boldsymbol{K}$ de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{x}$ si $\boldsymbol{x} \in \omega_2$.
4. On applique une transformation orthogonale pour diagonaliser $\boldsymbol{K}$, définie par
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Psi}^\top \boldsymbol{y}$$
$$\boldsymbol{\Lambda}' = \boldsymbol{\Psi}^\top \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Psi}$$
Donner alors la nouvelle matrice de variance-covariance de $\boldsymbol{u}$ lorsque $\boldsymbol{x}$ est un élément de la classe ω_1.
5. Définir la transformation globale appliquée à $\boldsymbol{x}$. On désigne par $\boldsymbol{B}$ la matrice de cette transformation. Le résultat s'appelle un blanchiment simultané des 2 classes.
6. Montrer que les termes de $\boldsymbol{\Lambda}'$ sont les valeurs propres de $\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_2$, et que $\boldsymbol{B}^\top$ est la matrice des vecteurs propres de cette même matrice.
7. Conclure sur l'intérêt de cette méthode.
8. Soit la matrice $\boldsymbol{S}$ définie par $\boldsymbol{S} = E\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\}$. Calculer $\boldsymbol{S}^{-1}$ en fonction de $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ et de $\boldsymbol{m}$